4　刚体转动

任课教师　曾灏宪

中原工学院　理学院

大学物理（上）

4　刚体转动

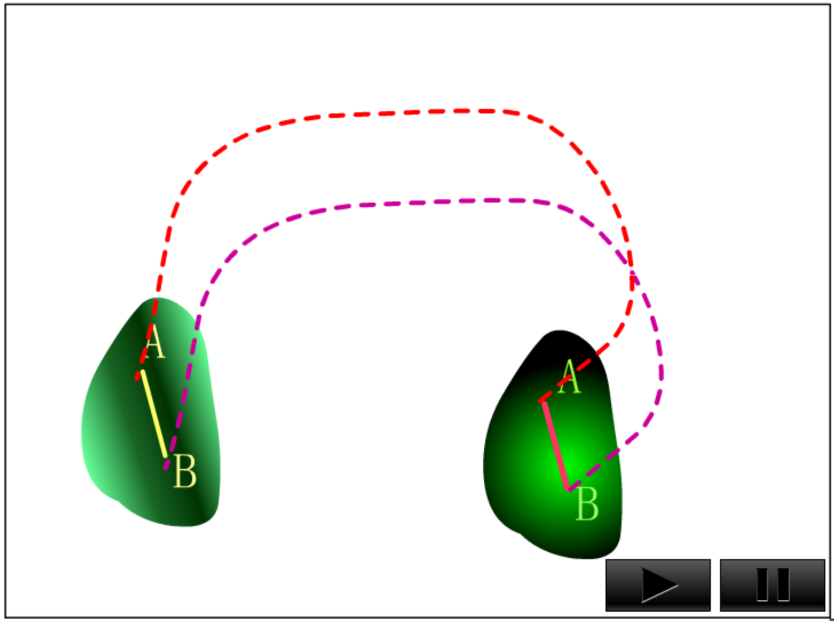
4.1 刚体的定轴转动

一 刚体的平动与转动

➢ 刚体：在外力作用下形状和大小都不发生变化的物体.（理想模型）

刚体的运动形式：平动、转动.

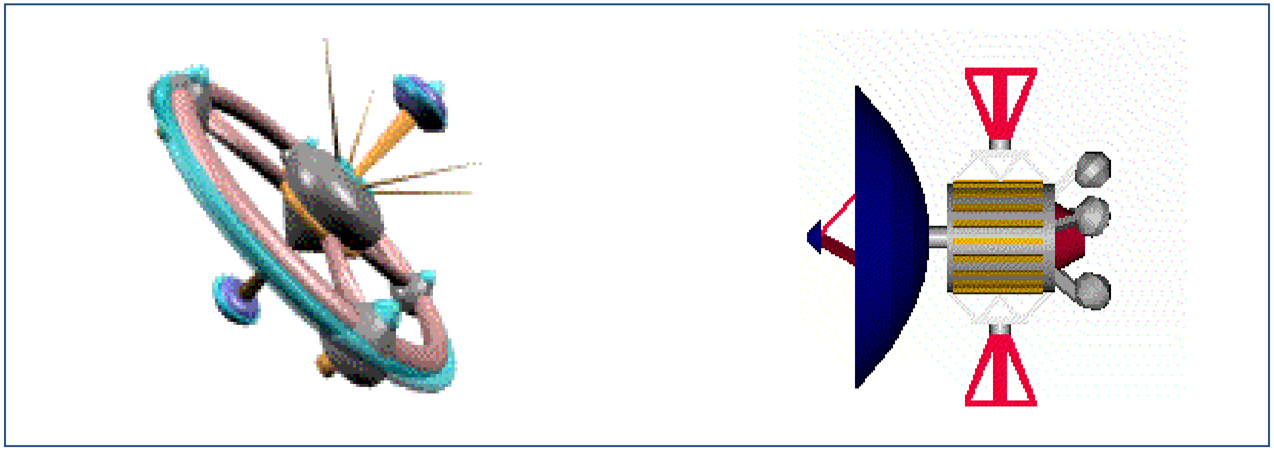
➢ 平动：若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线.



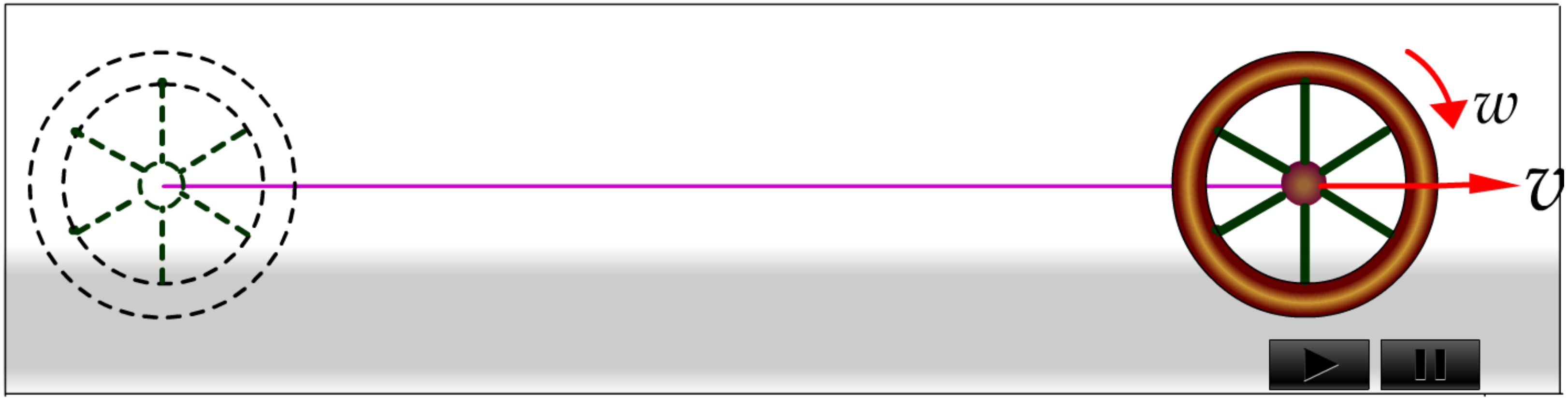
刚体平动 ⟶ 质点运动

- **转动**：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动．

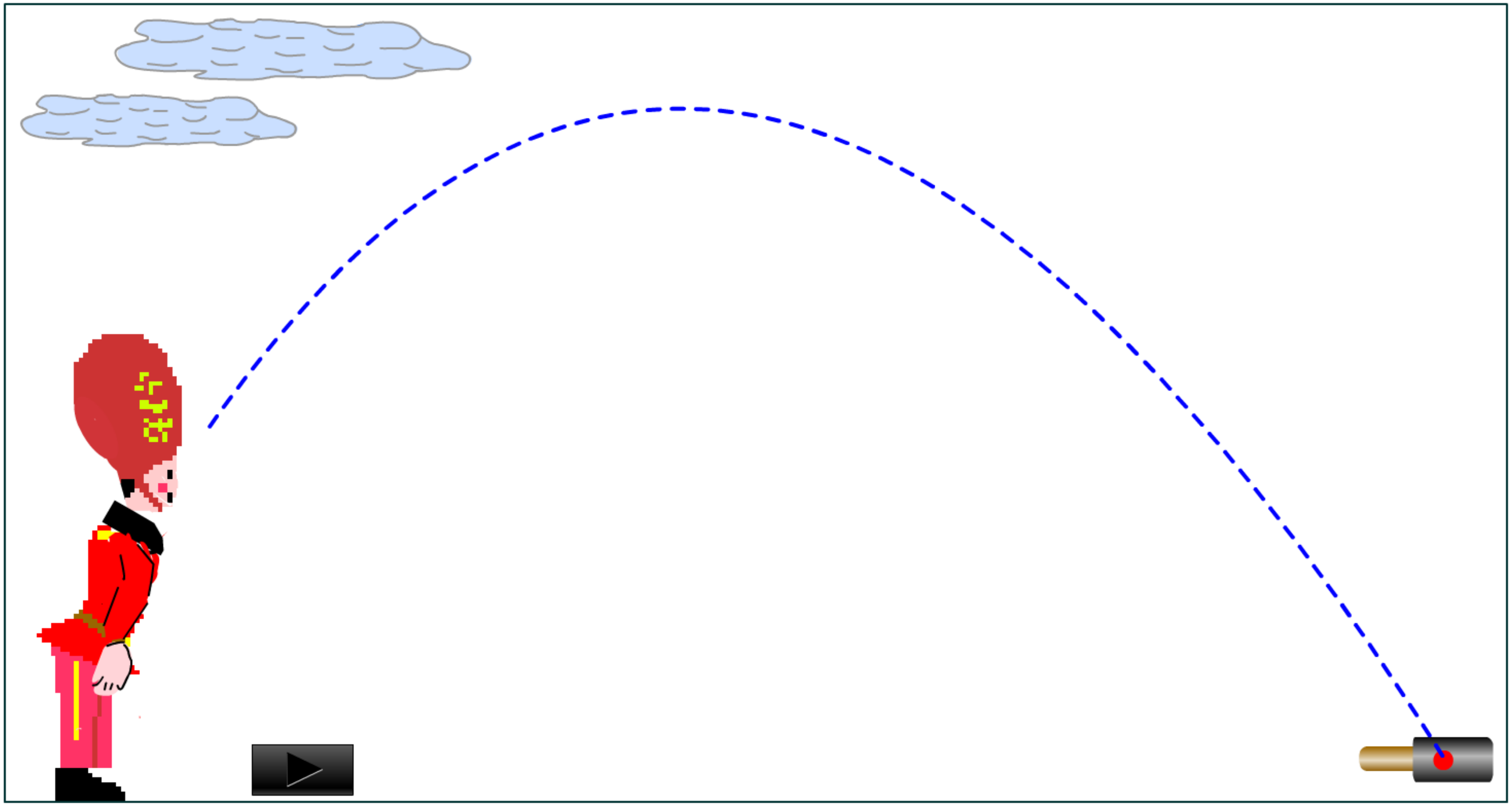
转动又分**定轴转动**和**非定轴转动**（瞬时转轴）．



- 刚体的平面运动．

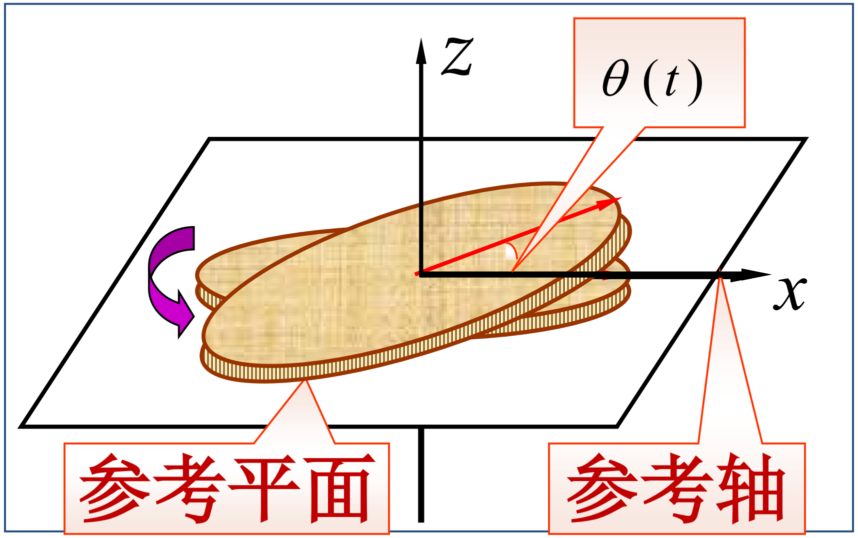


- 刚体的一般运动 质心的平动 + 绕质心的转动



二　刚体绕定轴转动的角速度和角加速度

1 角速度和角加速度



角坐标 $\theta = \theta(t)$

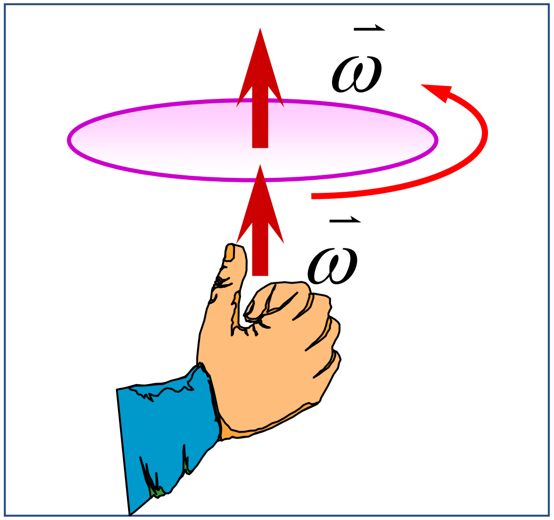
约定

沿逆时针方向转动 θ 增大

沿顺时针方向转动 θ 减小

角位移 $\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$

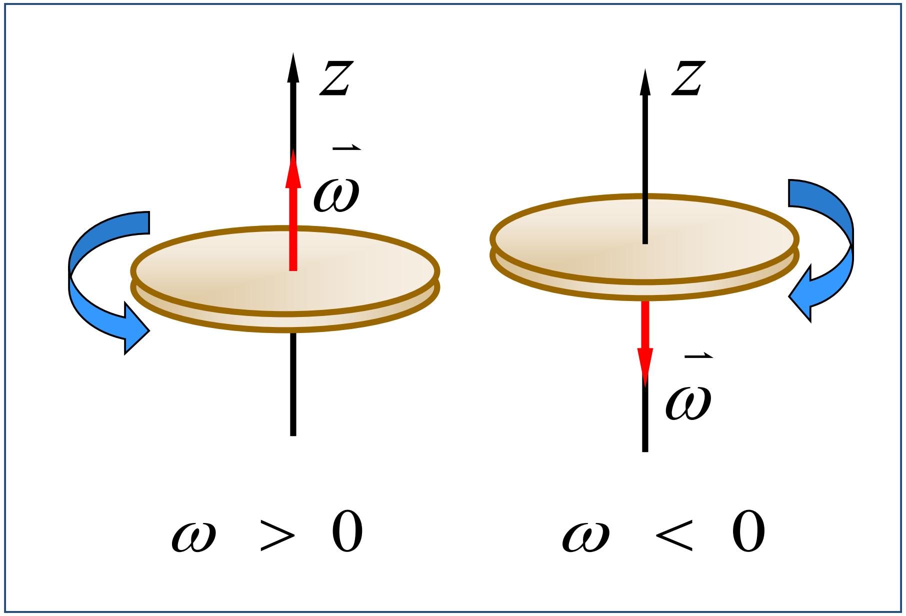
角速度矢量 $$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$



$\vec{\omega}$ 方向：右手螺旋方向

刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示．

角加速度 $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$



定轴转动的特点

1） 各质点均在垂直于转轴的转动平面内，作半径不同的圆周运动。

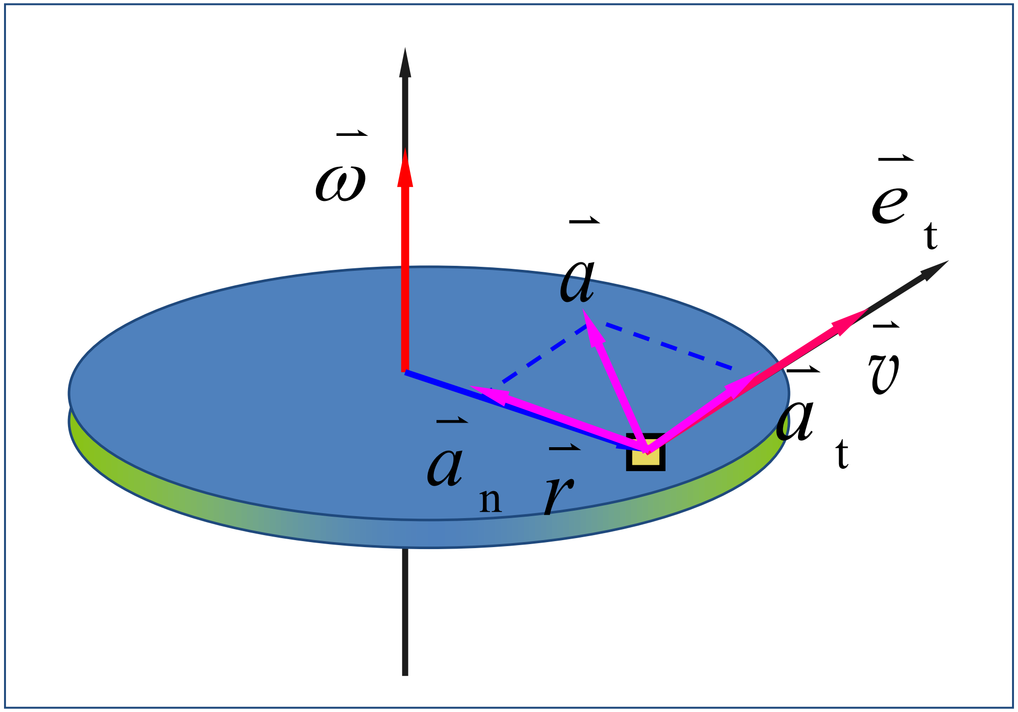
2） 运动描述仅需一个坐标（角量）。

3） 任一质点运动 $\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$ 均相同，但 $\vec{v}, \vec{a}$ 不同。

2 角量与线量的关系

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



$$\boxed{\vec{v} = r\omega\vec{e}_t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_t &= r\alpha \\ a_n &= r\omega^2 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = r\alpha\vec{e}_t + r\omega^2\vec{e}_n}$$

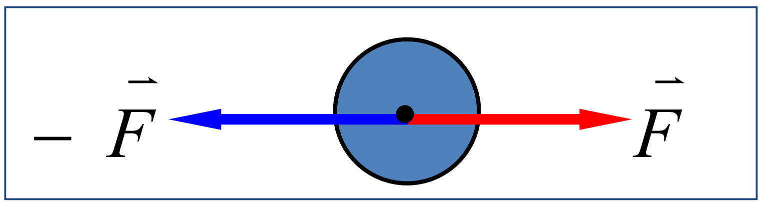
大学物理（上）

4　刚体转动

4.2 力矩 转动定律 转动惯量

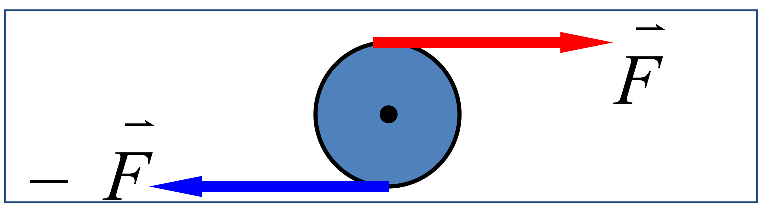
质点问题 → 力作用于一点

刚体问题 → 力的作用点的位置对运动有影响



$\sum \vec{F}_i = 0$ $\quad\sum \vec{M}_i = 0$

圆盘静止不动



$\sum \vec{F}_i = 0$ $\quad\sum \vec{M}_i \neq 0$

圆盘绕圆心转动

力矩可以反映力的作用点的位置对物体运动的影响.

一 力矩

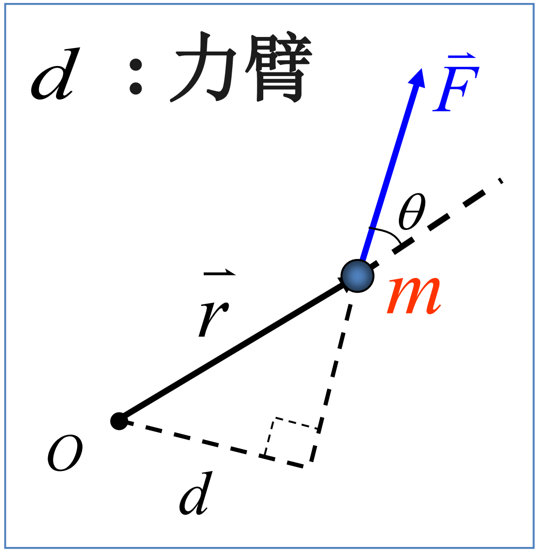
1 对参考点的力矩

定义：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

大小：$Fd = Fr\sin\theta$

方向：垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 组成的平面

符合右手螺旋定则



2 对轴的力矩

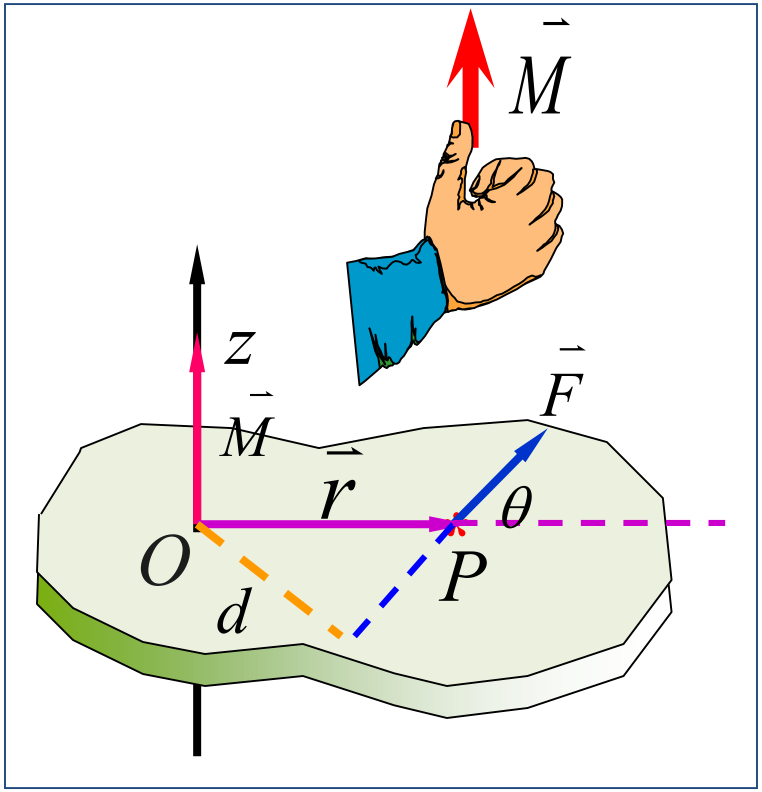
即，$\vec{r} \perp \vec{z}$

刚体绕 Oz 轴旋转，力 $\vec{F}$ 作用在刚体上点 P，且在转动平面内，$\vec{r}$ 为由点O到力的作用点 P 的径矢.

$\vec{F}$ 对转轴 Z 的力矩

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$$M = Fr\sin\theta = Fd$$

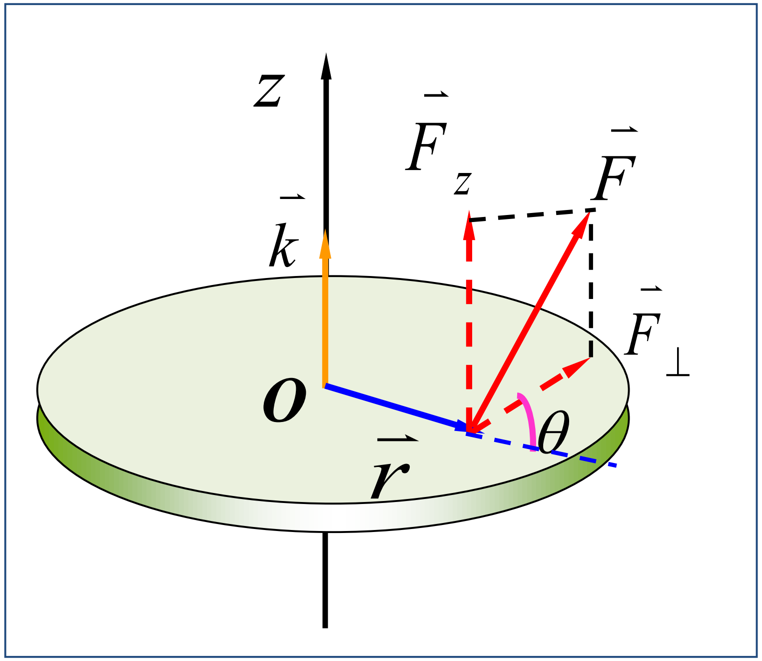


讨论： 1）若力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，可把力分解为平行于和垂直于转轴的两个分量

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\perp$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_z + \vec{F}_\perp)$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}_z + \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$



第一项 $\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_z$

方向垂直于轴，其效果是改变轴的方位；在定轴问题中，因轴受到约束，此力作用被抵消。

第二项 $\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$

方向平行于轴，其效果是改变绕轴转动状态，称为力对轴的矩。

$$M_z = \pm\left|\vec{r} \times \vec{F}_\perp\right|$$

$\vec{F}_\perp$ ： 力在转动平面内的分量

$\vec{r}$ ： 轴与转动平面的交点O到力作用点的位矢

讨论： 2）合力矩等于各分力矩的矢量和

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$

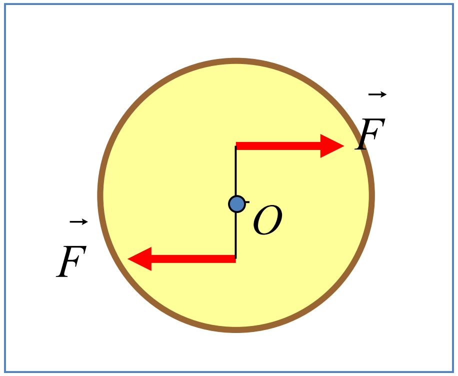
注意：不是合外力的力矩。

1. 力矩求和只能对同一参考点(或轴)进行。

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{1o} + \vec{M}_{2o} + \cdots$$ 矢量和

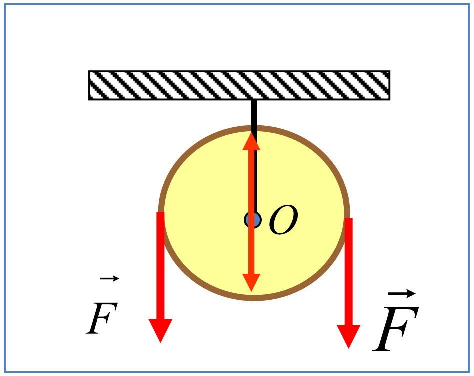
$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \cdots$$ 代数和

2.



$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M} \neq 0$$

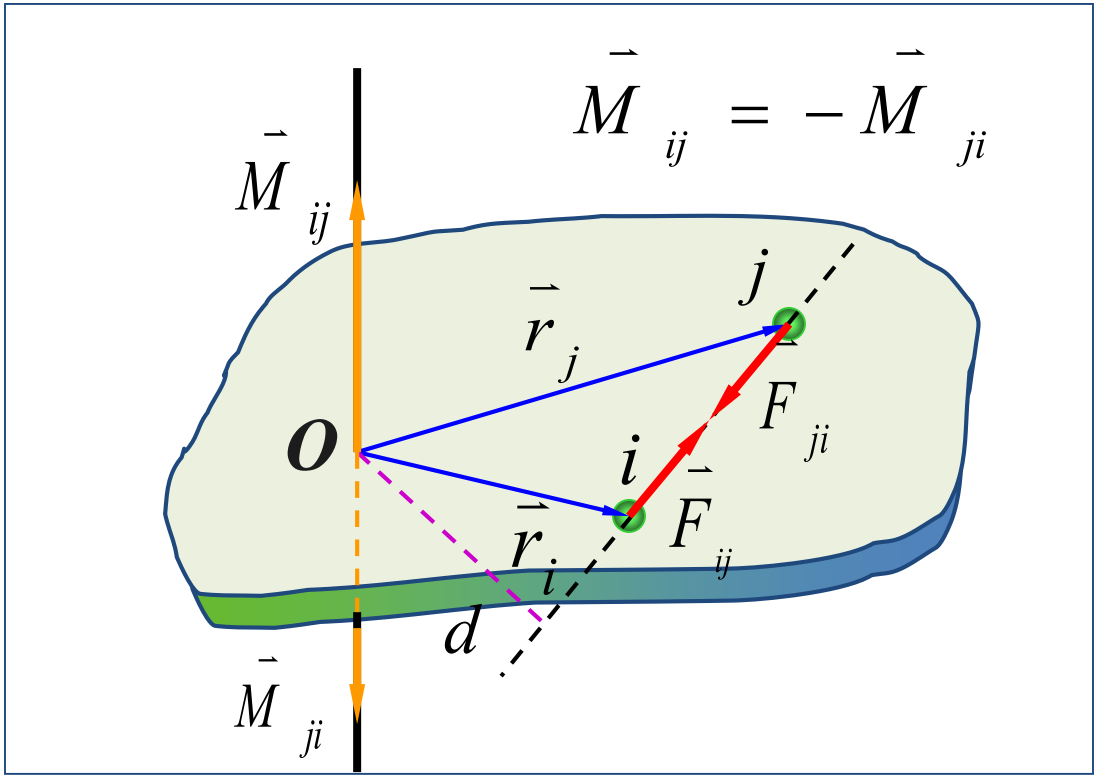


$$\sum \vec{F} \neq 0$$

$$\sum \vec{M} = 0$$

讨论：

3） 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消



结论：刚体内各质点间的作用力对转轴的合内力矩为零.

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_{ij} = 0$$

二　转动定律

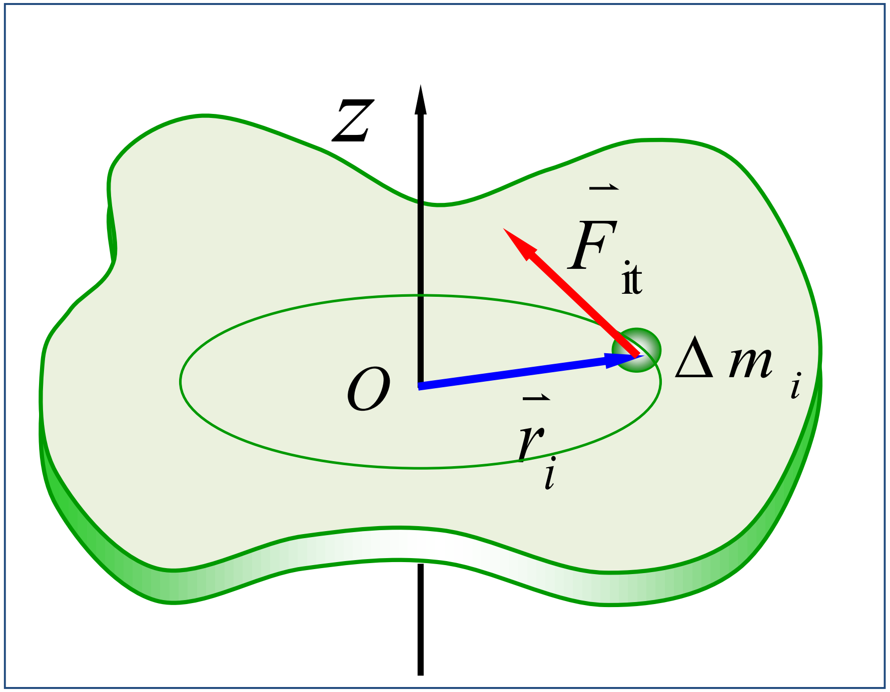
$$F_{it} = (\Delta m_i) a_t = (\Delta m) r_i \alpha$$

$$M_i = r_i F_{it} = (\Delta m_i) a_t r_i$$

$$\because \ a_t = r_i \alpha \quad \therefore \ M_i = (\Delta m_i) r_i^2 \alpha$$

$$M = \sum M_i = \sum (\Delta m_i) r_i^2 \alpha$$

$$= \alpha \sum (\Delta m_i) r_i^2$$



转动惯量 $J = \sum \Delta m_i r_i^2$

转动定律 $\boxed{\vec{M} = J \vec{\alpha}}$

刚体定轴转动的角加速度与它所受的**合外力矩**成正比，与刚体的**转动惯量**成反比．

比较：

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ M_z = J\alpha \end{cases}$$

m 是物体平动惯性的量度

J 是物体转动惯性的量度

$\vec{F}$ 改变物体平动状态的原因

M_z 改变物体绕轴转动状态的原因

- 转动惯量物理意义：描述物体转动惯性的大小
- 质量连续分布刚体的转动惯量

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 \mathrm{d}m \qquad \mathrm{d}m = \begin{cases} \rho \, \mathrm{d}V & \text{体分布} \\ \sigma \, \mathrm{d}S & \text{面分布} \\ \lambda \, \mathrm{d}l & \text{线分布} \end{cases}$$

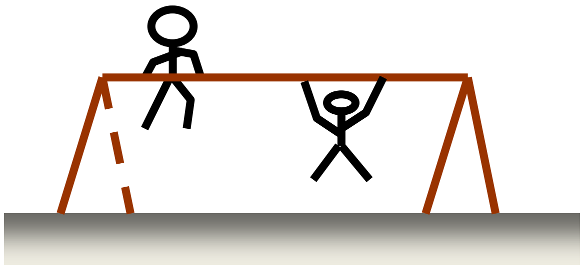
注意 转动惯量的大小取决于刚体的密度分布、几何形状及转轴的位置.

计算

$$J=\sum_i r_i^2 m_i \text{ 或 } \int r^2 \mathrm{d}m$$

影响 J 的因素

- 刚体的总质量 (同分布 $M>m$, $J_M>J_m$)
- 刚体质量分布 (同 m, $J_{中空}>J_{实}$)
- 转轴的位置

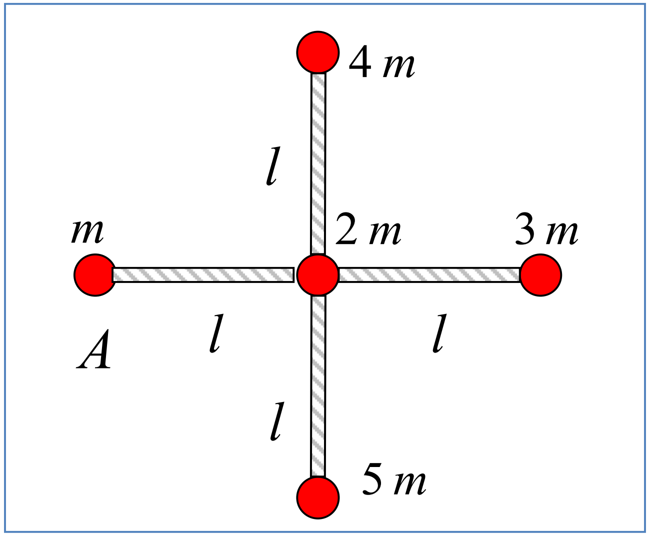


练习

1. 由长 l 的轻杆连接的质点如右图所示，求质点系对过 A 垂直于该平面的轴的转动惯量。

$$J=2ml^2+3m(2l)^2+(4m+5m)(\sqrt{2}l)^2$$

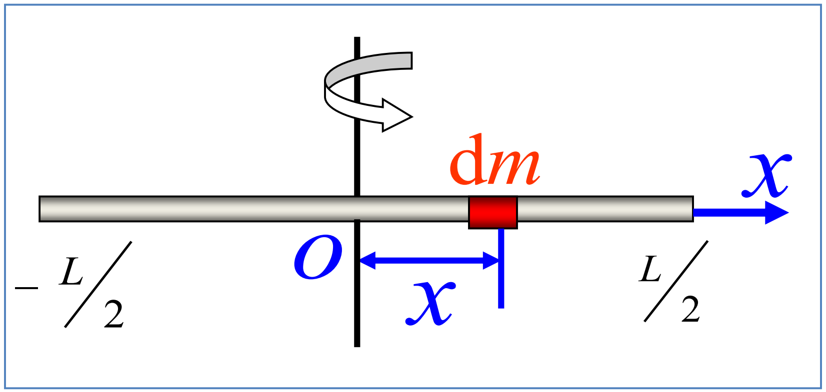
$$=32ml^2$$



思考：A移至$2m$处 J=?

2. 一长为 L 的细杆，质量 m 均匀分布，求该杆对垂直于杆，分别过杆的中点以及一端端点的轴的转动惯量。

解：(1) 轴过中点

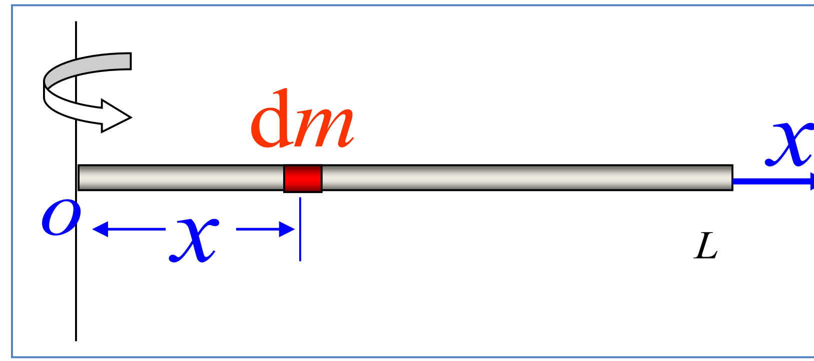


$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int x^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_{-L/2}^{L/2}x^2\frac{m}{L}\mathrm{d}x=\frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$=\frac{m}{L}\frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right)=\frac{1}{12}mL^2$$

(2) 轴过一端端点



$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int x^2\mathrm{d}m$$

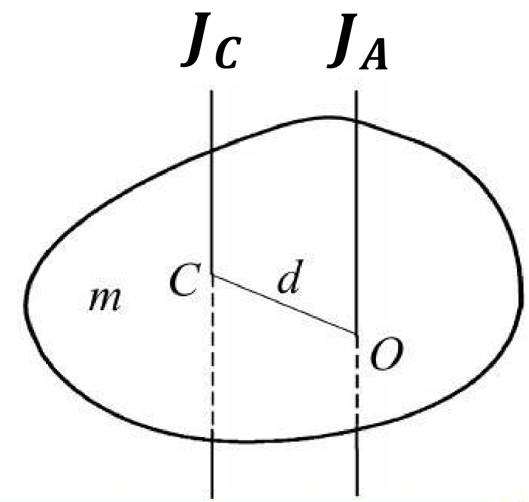
$$=\int_0^L x^2\frac{m}{L}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^L=\frac{1}{3}mL^2$$

平行轴定理

J_C 表示相对通过质心的轴的转动惯量，J_A表示相对通过相平行的另一个轴的转动惯量。两轴相距为 d，刚体质量为 m。则有：$J_A = J_C + md^2$。

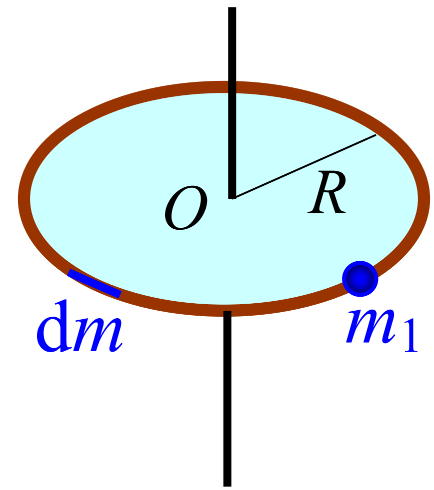
——平行轴定理



如前面的例 2，两轴相距 $L/2$，则

$$J_A = J_C + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

3. 求质量 *m* 、半径 *R* 的圆环对中心垂直轴的转动惯量。



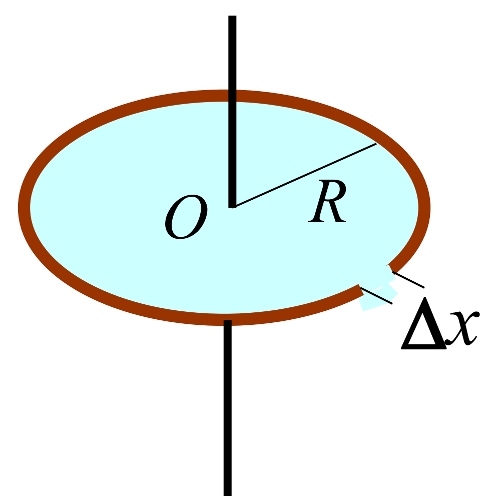
解: 圆环上取微元 dm

$$J=\int r^2 \mathrm{d}m=R^2\int_0^m \mathrm{d}m=mR^2$$

$$J=R^2\int_0^{2\pi R}\frac{m}{2\pi R}\mathrm{d}l=R^2 m$$

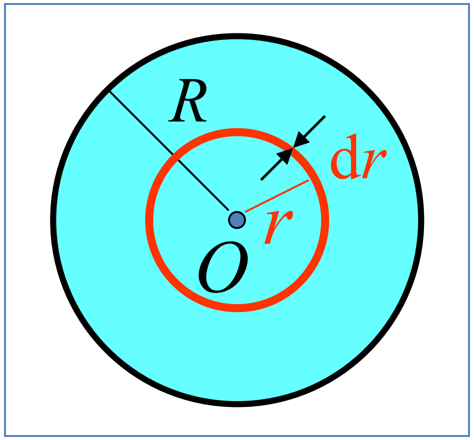
思考1. 环上加一质量为m_1的质点, J_1 =? $J_1=mR^2+m_1R^2$

思考2. 环上有一个Δx的缺口，J_2=?



$$J_2=mR^2-\frac{m}{2\pi R}\Delta x R^2$$

4. 求质量 *m*，半径 *R* 的均匀圆盘对中心垂直轴的转动惯量。

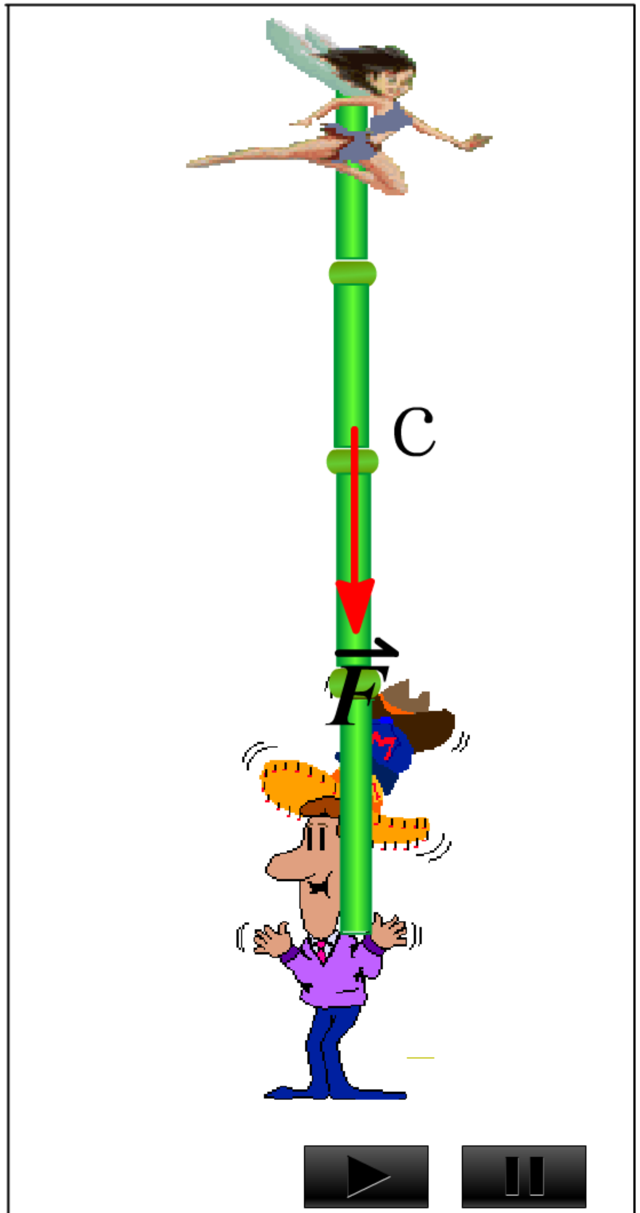


解: 圆盘上取半径为r宽度dr的圆环作为质量元dm

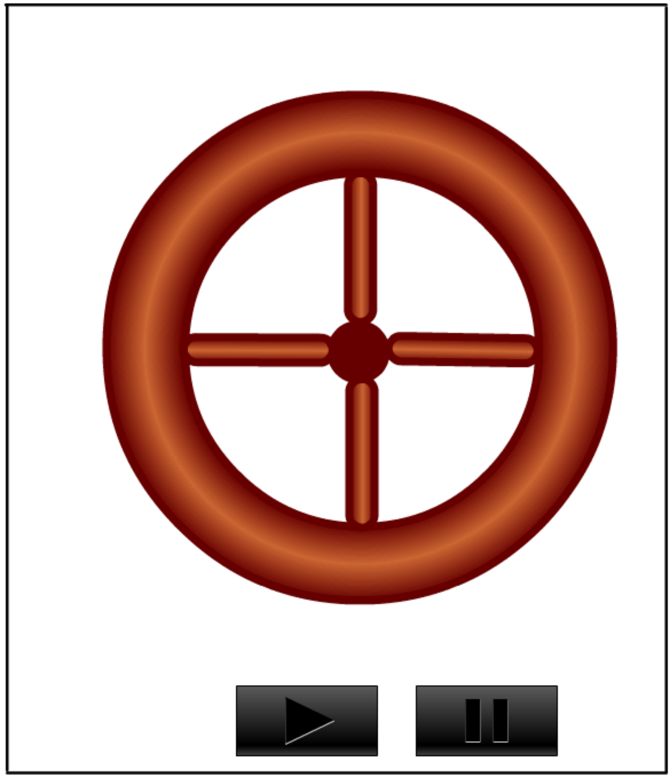
$$J_{环} = mR^2 \rightarrow \mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$J = \int r^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2} mR^2$$



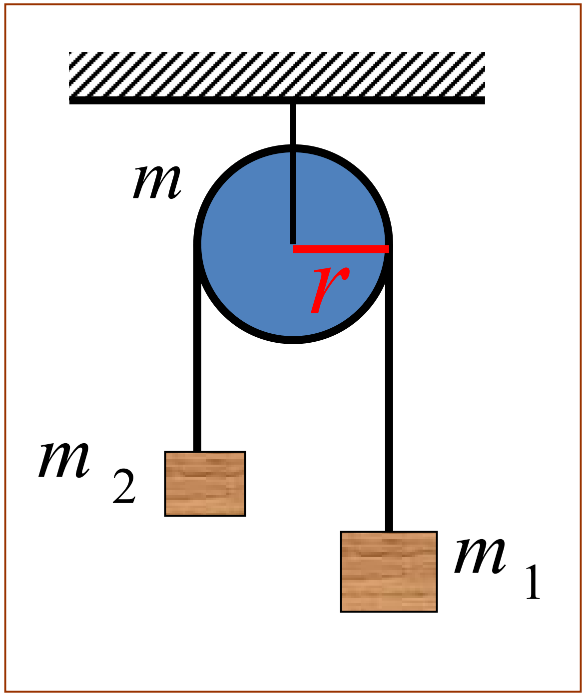
竿子长些还是短些较稳定？



飞轮的质量为什么
大都分布于外轮缘？

练习与例题

例： 一定滑轮的质量为 m ，半径为 r ，一轻绳两边分别系 m_1 和 m_2 两物体挂于滑轮上，绳不伸长，绳与滑轮间无相对滑动。不计轴的摩擦，初角速度为零，求滑轮转动角速度随时间变化的规律。



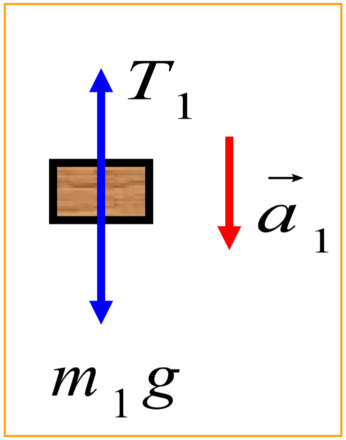
已知： m ， m_1 ， m_2 ， r ， $\omega_0 = 0$

求： $\omega(t) = ?$

思路：质点平动与刚体定轴转动关联问题，隔离法，分别列方程，先求角加速度，再

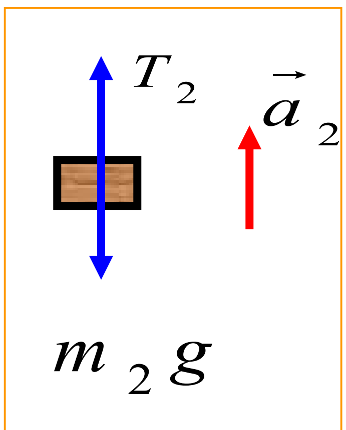
$$\beta \to \omega$$

解： 在地面参考系中，分别以 m_1，m_2，m 为研究对象，用隔离法，分别以**牛顿第二定律**和**刚体定轴转动定律**建立方程。



以向下为正方向

$$m_1: \quad m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad (1)$$

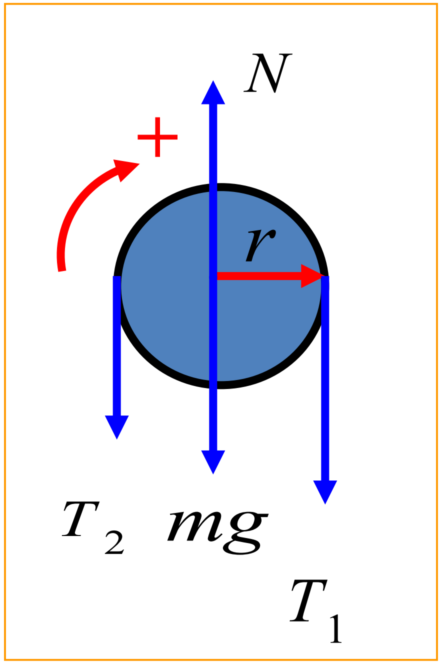


以向上为正方向

$$m_2: \quad T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \quad (2)$$

思考： $a_1 = a_2$ ？ $T_1 = T_2$ ？

✓ × 因为重滑轮加速转动



以顺时针方向为正方向

$$T_1 r - T_2 r = J\beta = \frac{1}{2} m r^2 \beta \qquad (3)$$

四个未知数：$a_1 = a_2 = a, \quad T_1, \quad T_2, \quad \beta$

三个方程 ？

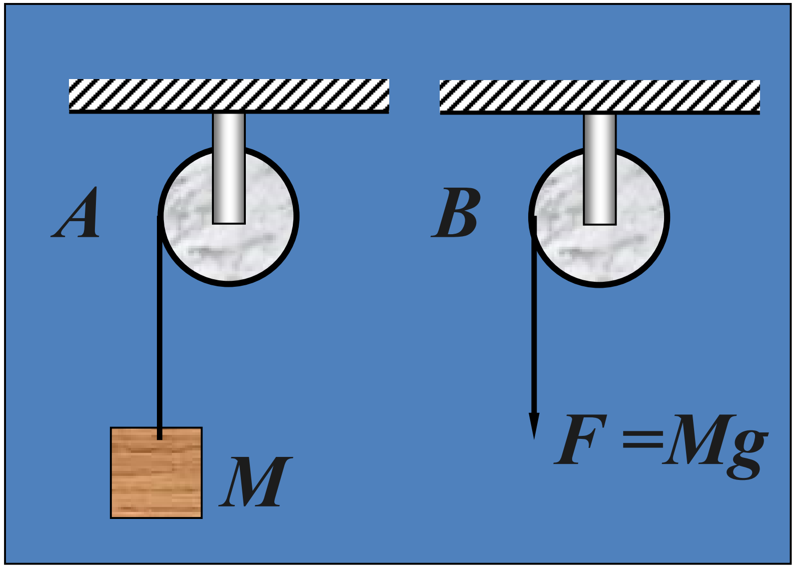
绳与滑轮间无相对滑动，由角量和线量的关系：

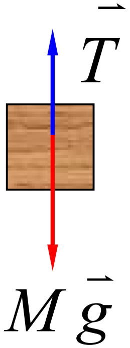
$$a = r\beta \qquad (4)$$

解得：

$$\beta = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r} \qquad \omega = \omega_0 + \beta t = \frac{(m_1 - m_2)gt}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r}$$

例 如图所示，A、B为两个相同的定滑轮，A滑轮挂一质量为M的物体，B滑轮受力$F = Mg$，设A、B两滑轮的角加速度分别为α_A和α_B，不计滑轮的摩擦，这两个滑轮的角加速度的大小关系为：





（**A**）$\alpha_A = \alpha_B$；

（**B**）$\alpha_A > \alpha_B$；

（**C**）$\alpha_A < \alpha_B$；

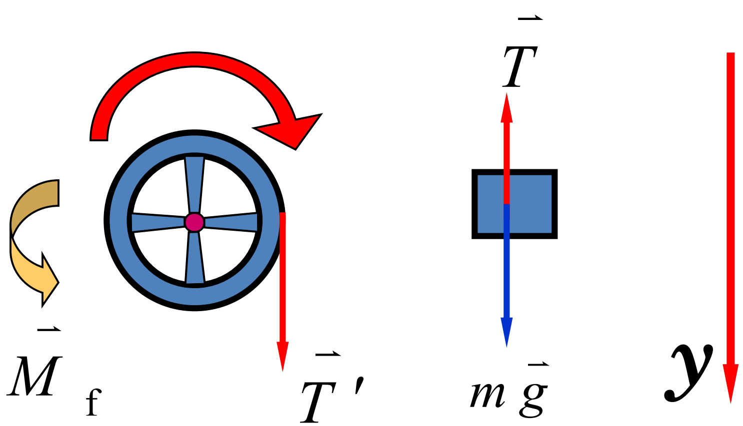
（**D**）无法确定.

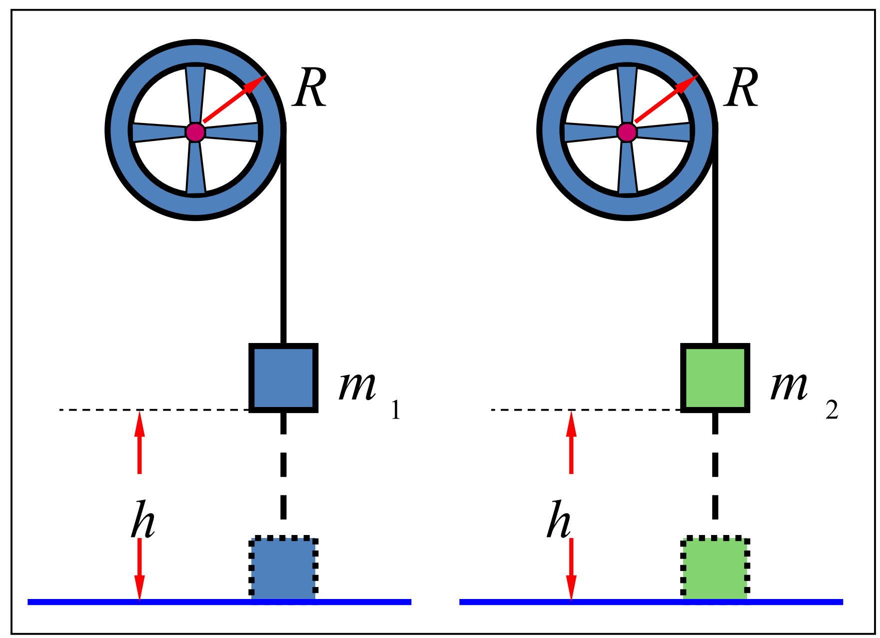
A
$$\begin{cases} Tr = J\alpha_A = J\dfrac{a_A}{r} \\ Mg - T = Ma_A \end{cases}$$

B
$$Fr = Mgr = J\alpha_B = J\dfrac{a_B}{r}$$

例： 求一半径 $R=50\ \mathrm{cm}$ 的飞轮对过其中心轴的转动惯量，在飞轮上绕以细绳，绳末端挂一重物，其质量 $m_1=8.0\ \mathrm{kg}$ ，让其从 $h=2.0\ \mathrm{m}$ 处静止下落，测得下落时间 $t_1=16\ \mathrm{s}$；若用质量 $m_2=4.0\ \mathrm{kg}$ 的重物时，$t_2=25\ \mathrm{s}$，假定摩擦力矩 M_f 是一个常量，求飞轮的转动惯量.

解：受力分析、 坐标如图



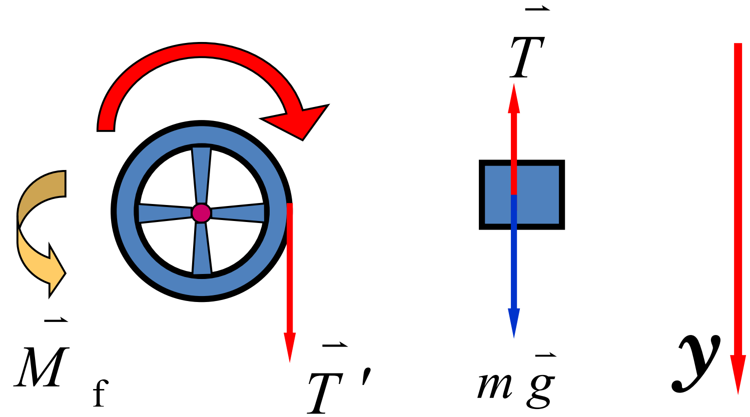


已知： $R = 50\ \text{cm}$ $h = 2.0\ \text{m}$

$m_1 = 8.0\ \text{kg}$ $t_1 = 16\ \text{s}$

$m_2 = 4.0\ \text{kg}$ $t_2 = 25\ \text{s}$

$M_f = C$ **求：** J



$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_1 R - M_f = J \dfrac{a_1}{R} \\ h = \dfrac{1}{2} a_1 t_1^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ T_2 R - M_f = J \dfrac{a_2}{R} \\ h = \dfrac{1}{2} a_2 t_2^2 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{2h}{t_1^2} = 0.0156\ \text{m/s}^2 \qquad a_2 = \frac{2h}{t_2^2} = 0.0064\ \text{m/s}^2$$

$$\begin{cases} a_1 = 0.0156 \ \text{m/s}^2 \\ a_2 = 0.0064 \ \text{m/s}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$T_1 = m_1(g - a_1) = 78.3\,\text{N}$$

$$T_2 = m_2(g - a_2) = 39.2\,\text{N}$$

$$\begin{cases} T_1 R - M_f = J\dfrac{a_1}{R} \\ T_2 R - M_f = J\dfrac{a_2}{R} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(a_1 - a_2)J = (T_1 - T_2)R^2$$

$$J = \frac{(T_1 - T_2)R^2}{a_1 - a_2}$$

$$= 1.06 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

作业

- P112：11；12；

版权声明